

# L'ABERRAZIONE CROMATICA



Studio della relazione fra la misura della focale  $f$  di una lente sottile convergente e la lunghezza d'onda della radiazione incidente e determinazione dei parametri di best-fit  $A$  e  $B$  nella relazione di Cauchy.

A cura di Foltran Alberto, Recchia Michela, Vitali Marina, Viviani Camilla, Peccolo Simone, Sech Edoardo, Sadak Ikram, Milanese Nicolò, Toffolin Leonardo, Chisini Giovanni

Realizzato nell'ambito del *Progetto Archimede*  
con la supervisione del Prof. F.Zampieri  
I.S.I.S.S. "M.Casagrande", Pieve di Soligo, Febbraio 2016

## Sommario

*In questo articolo si presenteranno i risultati delle misurazioni delle focali di due lenti sottili convergenti, effettuate con luce monocromatica di diverso colore, in particolare per una lente da 10 cm ed una da 5 cm. Notando la diversità di tali valori, si è cercato di calibrare la nota relazione di Cauchy che fornisce la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, mediante un metodo di fit ottenuto grazie al software Geogebra 5.0, finalizzato al calcolo dei coefficienti  $A$  e  $B$ .*

## 1 Richiami teorici

Il fenomeno dell'aberrazione cromatica di uno strumento ottico rifrangente consiste nella variazione dell'angolo di rifrazione dei raggi luminosi in dipendenza dalla loro lunghezza d'onda  $\lambda$ . In particolare si dimostra che l'indice di rifrazione di un mezzo trasparente varia al variare della lunghezza d'onda della luce che lo attraversa e quindi deve variare l'angolo di rifrazione, secondo la legge di Cartesio-Snell. In particolare succede che (per radiazioni policromatiche) le componenti dello spettro con lunghezza d'onda più corta vengono rifratte maggiormente rispetto a quelle con lunghezza d'onda più lunga, causando un difetto nella formazione dell'immagine, per quanto riguarda i colori: il difetto si manifesta come un alone attorno all'oggetto osservato, rosso da una parte e blu dall'altra.

Ciò accade in particolare anche per la lente, ossia una coppia di superfici diottriche affiancate, che provoca, secondo le modalità della legge della rifrazione, la deviazione dei raggi luminosi che provengono da una sorgente. Possiamo allora supporre che la focale  $f$  di una lente sottile possa variare con il colore della luce che la attraversa: in altre parole si osserverà una particolare dipendenza del valore della focale dalla lunghezza d'onda della luce (monocromatica) utilizzata, in virtù della quale possiamo dire che

$$f = f(\lambda) \quad (1)$$

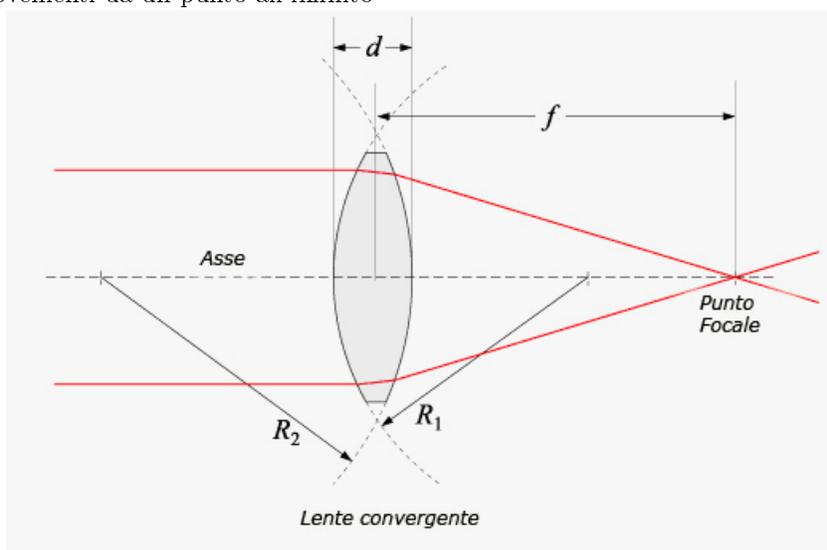
Una possibile relazione di tale tipo, e quella detta *relazione di dispersione di Cauchy*: essa fornisce una approssimazione analitica per la dipendenza dell'indice di rifrazione  $n$  dalla lunghezza d'onda della luce:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (2)$$

Possiamo allora ipotizzare che per la dipendenza di  $f$  da  $\lambda$  sussista una relazione dello stesso tipo. Quindi si tratterà di misurare le focali delle lenti illuminandole con luce monocromatica di diverso colore e di effettuare un best fit con la relazione (2), calibrando i parametri  $A$  e  $B$ .

## 2 Misurazione della focale

La focale di una lente è definita come distanza dal centro della lente al punto nel quale convergono tutti i raggi rifratti provenienti da un punto all'infinito



È stato utilizzato un banco ottico consistente in una rotaia piana e rettilinea su cui sono stati montati dei supporti movibili. Una lampada ad incandescenza fornisce la radiazione luminosa che viene prima fatta passare attraverso un filtro colorato monocromatico (di tipo PHYWE) di cui era noto il picco della banda passante. La radiazione viene poi collimata grazie ad una mascherina a più fori, per formare su uno schermo l'immagine rifratta da parte di una lente.

Nel nostro caso abbiamo usato due lenti sottili convergenti (biconvesse) in plexiglass che abbiamo chiamato  $L_1$  e  $L_2$ , le cui focali medie erano rispettivamente  $f_1 = 10\text{ cm}$  e  $f_2 = 5\text{ cm}$ .

Per la determinazione della focale  $f_1$  è stato fatto uso della equazione dei punti coniugati

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (3)$$

Cercando di massimizzare la distanza della sorgente dalla lente (affinchè i raggi incidenti fossero il più possibile paralleli all'asse ottico), è stata posta la mascherina ad una distanza  $p$  a piacere dalla lente ed in sua dipendenza si è spostato lo schermo in modo tale che l'immagine dei fori fosse il più possibile a fuoco (ossia nitida, di forma circolare e ben illuminata): la distanza dalla lente allo schermo è stata chiamata  $q$ : entrambe le distanze sono state misurate con un metro da falegname. Tramite la (3) sono stati calcolati  $N = 20$  valori di  $f_1$  per ciascun filtro colorato usato (rosso, violetto, blu, giallo, verde).

Per ogni gruppo di misure è stato calcolato, per mezzo di un foglio di calcolo, il valore medio  $f$  e l'errore massimo (semidispersione)  $E_f$ , trovando i seguenti valori:

colore	$\lambda$	$f$	$E_f$
violetto	440 nm	10,062 cm	0,333 cm
blu	450 nm	9,984 cm	0,533 cm
giallo	488 nm	10,098 cm	0,920 cm
verde	525 nm	10,040 cm	0,394 cm
rosso	610 nm	10,133 cm	0,651 cm

Per la misurazione delle focali della lente  $L_2$  si è invece fatto uso del metodo di Bessel, che si basa sulla simmetria della relazione dei punti coniugati (3): scambiando i valori di  $p$  e  $q$  si ottiene lo stesso valore per  $f$ . Si è determinata una configurazione in cui l'immagine era a fuoco, determinando così  $p$  e  $q$ , dunque determinando un primo valore per la focale, detto  $f_1$ . Successivamente si è posta la mascherina a distanza  $q$  dalla lente e si è verificato che lo schermo che raccoglieva l'immagine a fuoco fosse pressappoco alla distanza  $p$  dalla lente, determinando un secondo valore per la focale detta  $f_2$ . Una media aritmetica

fra  $f_1$  e  $f_2$  fornisce la stima più precisa per  $f$ . Il procedimento è stato iterato per  $N = 20$  volte per ogni filtro colorato. Per ogni gruppo di misure è stato calcolato, per mezzo di un foglio di calcolo, il valore medio  $f$  e l'errore massimo (semidisersione)  $E_f$ , trovando i seguenti valori:

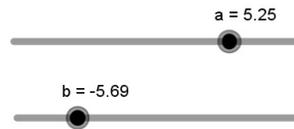
colore	$\lambda$	$f$	$E_f$
violetto	440 nm	4,893 cm	0,344 cm
blu	450 nm	5,133 cm	0,158 cm
giallo	488 nm	4,278 cm	0,294 cm
verde	525 nm	5,094 cm	0,100 cm
rosso	610 nm	5,105 cm	0,241 cm

### 3 Calibrazione della relazione di Cauchy

Per mezzo del software Geogebra 5.0 si è rappresentata la distribuzione di punti  $(\lambda, f)$  avendo cura di usare come unità di misura per  $\lambda$  l'unità  $10^2 \text{ nm}$  e per  $f$  i  $\text{cm}$ . Sono state rappresentate anche le barre di errore sulle focali per le lunghezze d'onda considerate: ad ogni valore di  $f$  per  $\lambda$  fissato è stato quindi associato l'errore assoluto (come semidisersione) sulla media.

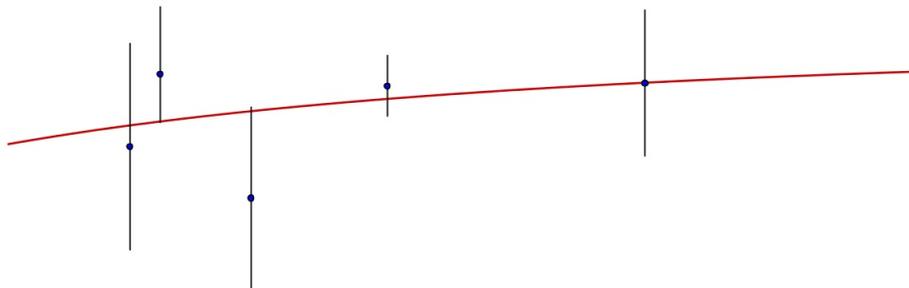
Facendo uso di una relazione come la (2), si è cercata la coppia di valori  $A$  e  $B$  che minimizzasse la somma  $s$  dei quadrati degli scarti  $f_{oss} - f_{calc}$  ove con  $f_{oss}$  si intendono i valori sperimentali e con  $f_{calc}$  quelli determinati con la (2) una volta fissati i due parametri. La ricerca della coppia di valori di best-fit è stata effettuata mediante una variazione dei parametri  $A$  e  $B$  tramite due *slider*, in dipendenza dai quali è stata calcolata la somma  $s$ . Muovendo i due *slider*, è stata trovata empiricamente la coppia di valori che rendeva minima  $s$ .

(3.75, 6.59)



LENTE convergente f=5cm

**0.56**

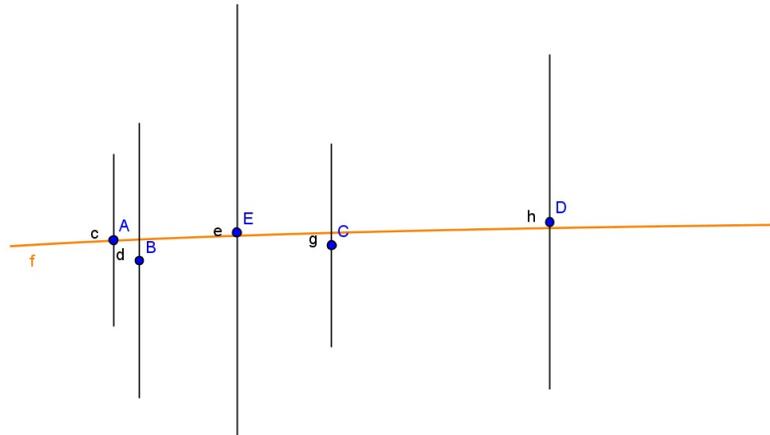


In figura, sono riportati i risultati inerenti la lente di focale  $f = 5 \text{ cm}$ . Si possono vedere i valori di  $a$  e  $b$  per i due *slider* che rendono minima la somma  $s$  (il cui valore è indicato in nero e grassetto) e la posizione dei punti con le barre di errore sul grafico. In corrispondenza dei valori dei due parametri è stata riportata la relazione, che come si può vedere passa per tutte le barre di errore.

E' stato fatto lo stesso per la lente di focale  $f = 10 \text{ cm}$ . In figura i risultati ottenuti

0.17

lente convergente  $f=10$  cm



Anche in questo caso, la relazione di best-fit passa per tutte le barre di errore.

## 4 conclusioni

Nonostante la presenza di errori anche abbastanza consistenti, dovuti alla difficoltà di stima delle focali coi due metodi visti e alla presenza della cosiddetta profondità di campo (un effetto che rende a fuoco l'immagine all'interno di un certo intervallo per  $q$ ), possiamo ritenere che la relazione di Cauchy si possa ritenere valida per le due lenti che abbiamo considerato. Si può quindi ritenere attendibile il modello matematico che lega la distanza focale  $f$  alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce monocromatica usata.