LE EQUAZIONI DI TERZO GRADO

Le dodici fatiche di Cardano, Viète e Ferrari

a cura di Carniel Chiara, Collodet Alberto, Dalto Nicola,
De Faveri Andrea, Furlan Francesco, Merotto Lorenzo, Titton Andrea

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione dei Prof. Fabio Breda
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2013/14

Ma quando e da chi è stata scoperta la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado? La storia della formula risolutiva delle equazioni di terzo grado ha inizio all'inizio del XVI secolo quando Scipione del Ferro, docente di matematica all'Università di Bologna, scoprì la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado del tipo 1: $x^3 + px = q$. Egli tuttavia, non ritenendosi pienamente soddisfatto, mantenne segreta la scoperta, rivelandola solamente al suo studente Antonio Maria Fior in punto di morte. Spostiamoci ora a Brescia dove Zuanne da Coi, un mediocre insegnante di aritmetica, sfidò il matematico Niccolò Fontana detto il Tartaglia, suo concittadino, con l'intenzione di umiliarlo. Siamo nel 1530 e a quel tempo le sfide di matematica erano molto comuni tra gli intellettuali. Questi duelli avevano la connotazione di sfide pubbliche con la presenza di testimoni, notai e precisi rituali; ogni sfidante proponeva al suo avversario dei quesiti da risolvere entro un certo limite di tempo, nessuno però poteva proporre quesiti che non sapesse lui stesso risolvere. Il vincitore otteneva un premio in denaro e, grazie alla celebrità ottenuta, veniva chiamato a tenere conferenze in molte città facendosi così conoscere e aumentando i suoi allievi paganti.

Vincere comportava numerosi vantaggi, quindi per prevalere nelle sfide, molte delle scoperte in ambito matematico furono mantenute segrete per lungo tempo. Ma torniamo a noi: Da Coi propose dei quesiti a Tartaglia che si basavano sulla risoluzione di equazioni cubiche del tipo 2: $x^3 + mx^2 = q$ e 3: $x^3 + mx^2 + px = q$ convinto che lui non li sapesse risolvere.

Tartaglia tuttavia umiliò Da Coi sostenendo che lui stesso non sapesse risolvere i propri quesiti e dicendo di aver trovato una formula risolutiva per le equazioni di terzo grado del tipo 2. Il clamore provocato dalla vittoria di Tartaglia, che nel frattempo si era trasferito a Venezia, portarono Fior a sfidarlo: entrambi conoscevano solo la formula per un determinato tipo di equazioni e si proposero reciprocamente quesiti basati sulle proprie conoscenze. Tartaglia riuscì comunque a trovare la formula risolutiva delle equazioni del tipo 1 al contrario di Dal Fior, che uscì sconfitto.

Siamo nel 1536 e Da Coi, venuto a sapere della vittoria di Tartaglia, lo prega di rivelargli la formula ma, dopo il rifiuto categorico del matematico, se ne va a Milano dove conosce il medico e matematico Girolamo Cardano.

Questi ha in progetto di scrivere una grande opera matematica (l'Ars Magna) e, venuto a sapere del successo di Tartaglia e della sua scoperta nel campo della risoluzione delle equazioni, lo prega di rivelargliela ma Tartaglia rifiuta perché, sebbene impegnato in altre faccende, ha intenzione di proseguire in futuro lo studio delle equazioni; ritiene infatti che la formula da lui posseduta sia la chiave per arrivare a molte altre formule risolutive e che una mente abile come quella di Cardano, ottenuta la prima formula, non avrebbe difficoltà a trovarne altre. Cardano tuttavia continua, facendo leva su lusinghe e ricompense finanziarie, a pregare Tartaglia di rivelargli il segreto e alla fine, nel 1539, quest'ultimo cede, consegnandogli la risposta e facendogli giurare di mantenerla segreta. La soluzione viene però consegnata sotto forma di indovinello:

Quando che 'l cubo con le cose appresso	$x^3 + px$
Se agguaglia a qualche numero discreto	$= q$
Trovan dui altri differenti in esso.	$u - v = q$
Dapoi terrai questo per consueto	
Che 'l loro produtto sempre sia eguale	$u \cdot v =$
Al terzo cubo delle cose neto;	$(\frac{p}{3})^3$
El residuo poi suo general,	
Delli lor lati cubi ben sottratti	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
Varrà la tua cosa principale.	$= x$
In el secondo de cotesti atti	
Quando che 'l cubo, restasse lui solo	$x^3 = px + q$
Tu osserverai quest'altri contratti	
Del numer farai due tal part' a volo	$u + v = q$
Che l'una, in l'altra, si produca schietto	$u \cdot v =$
El terzo cubo delle cose in stolo	$(\frac{p}{3})^3$
Delle quali poi, per commun precetto	
Terrai li lati cubi, insieme gionti	$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = x$
El cotal somma, sarà il tuo concetto.	
El terzo, poi de questi nostri conti	$x^3 + q = px$
Se solve col secondo, se ben guardi	
Che per natura son quasi congionti.	

Cardano, a cui era servito l'aiuto di Tartaglia per decifrare il messaggio, inizia quindi ad investigare sulla formula ma si accorge però dell'esistenza di un casus irriducibilis, per risolvere il quale è necessario passare per i numeri complessi,che allora non erano conosciuti né tantomeno utilizzati. Il milanese comunica quindi il problema a Tartaglia, che però non riesce a trovare alcuna soluzione, e le strade dei due sembrano separarsi.

Facciamo ora un passo indietro al 1536, quando si presenta a casa di Cardano, Ludovico Ferrari, un giovane disposto a lavorare come servitore. Cardano, impegnato a scrivere l'Ars Magna, lo accoglie e dopo essersi accorto delle sue doti eccezionali lo nomina suo segretario e decide di insegnargli la matematica. Ferrari si dimostra enormemente dotato e Cardano decide di proporgli il problema dell'equazione di quarto grado, a cui il ragazzo trova soluzione nel 1540. Questa soluzione contiene però un passaggio che richiede la risoluzione dell'equazione di terzo grado, per cui la scoperta non poteva essere pubblicata senza rompere il giuramento fatto da Cardano a Tartaglia.

I due, ricordatisi dei discorsi di Antonio Maria Fior sul come avesse ricevuto la formula da un grande maestro del passato si recarono a Bologna nella speranza di trovare notizie di una scoperta anteriore a quella di Tartaglia: la trovarono in un documento antecedente il 1426 e questo rese il giuramento nullo.

Nel 1545 Cardano termina l'Ars Magna e la pubblica, citando esplicitamente Tartaglia e Del Ferro come padri del metodo risolutivo per le equazioni di terzo grado.

Tartaglia ovviamente non accettò la cosa ed accusò Cardano, il quale non rispose nulla. In difesa del maestro si schierò Ferrari che diede il via allo scambio dei cartelli di matematica disfida, sei in tutto, in cui confutò tutte le accuse di Tartaglia e lo sfidò pubblicamente per il 10 agosto 1548; sappiamo che Ferrari vinse per abbandono da parte di Tartaglia ma le versioni sull'esito di questa sfida sono molte. In conclusione, a cosa ci è servito tutto questo resoconto? Era necessario fare un po' di luce su quelle che dalla pubblicazione dell'Ars Magna sono state chiamate Formule di Cardano la cui origine era però per molti avvolta nel mistero. Chiaramente ora non possiamo denunciare Cardano per furto di equazione oppure risarcire Del Ferro per non averlo mai preso in considerazione, ma è corretto dare il giusto riconoscimento a tutti i matematici che hanno contribuito a questa scoperta. Sarebbe quindi meglio iniziare a chiamare queste formule Formule di Ferro-Tartaglia-Cardano, tre autori per un'equazione di grado tre.

1 Procedimento per risolvere le equazioni di grado terzo

In questa prima parte cercheremo di illustrare il metodo di risoluzione inventato da Tartaglia; partiamo dalla forma generale di una qualsiasi equazione di terzo grado a coefficienti reali:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Per la risoluzione è necessario, ponendo $x = y - \dfrac{b}{3a}$, portare l'equazione alla forma

$$y^3 + py + q = 0$$

dove

$$\begin{cases} p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2} \\ \\ q = \dfrac{d}{a} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{2b^3}{3a^3} \end{cases}$$

Ora poniamo $y = u+v$, cioè passiamo da un problema ad una variabile ad un problema a due variabili, e andiamo a sostituire:

$$\begin{aligned} y^3 + py + q &= (u+v)^3 + p(u+v) + q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q \\ &= (u^3 + v^3 + q) + 3uv(u+v) + p(u+v) \\ &= (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv+p). \end{aligned}$$

Risolvere l'equazione $y^3 + py + q = 0$ è equivalente a cercare due numeri u e v tali che $u^3 + v^3 + q = 0$ e $3uv + p = 0$, cioè

$$y^3 + py + q = 0 \ \Leftrightarrow \ \exists\, u, v \text{ tali che } \begin{cases} u + v = y \\ u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

La freccia $\Leftarrow$ è immediata perché $y^3 + py + q = (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv+p)$. Anche il viceversa è vero, infatti sia y tale che $y^3 + py + q = 0$, è sempre possibile trovare due numeri u e v tali che $u + v = y$ e $uv = -\dfrac{p}{3}$ (non è altro che il problema della somma-prodotto di 2 numeri). Questi 2 numeri con queste proprietà verificano anche $u^3 + v^3 + q = 0$ poichè $(u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv+p) = y^3 + py + q = 0$.

Quindi tutto si riduce a risolvere il sistema in u, v

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

che, elevendo al cubo la seconda equazione, diviene

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}.$$

E' importante sottolineare che il passaggio tra i due ultimi sistemi non è reversibile, non vale cioè il viceversa. Questo perchè u e v possono essere numeri complessi e per tali numeri non vale l'implicazione $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$. Dunque conosciamo il prodotto e la somma di u^3 e di v^3 e quindi per trovarli basta risolvere l'equazione di secondo grado

$$z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3 = 0$$

e cioè
$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$
Grazie alla nota formula risolutiva delle equazioni di secondo grado otteniamo che
$$u^3, v^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Così (è indifferente quale delle due radici si assegna a u^3 e quale rimane a v^3 poichè tutto è simmetrico in u e v)
$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
e quindi
$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e, dato che $y = u + v$, otteniamo finalmente la celeberrima FORMULA RISOLUTIVA delle equazioni di terzo grado di Cardano:
$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$
che può essere presentata anche nella forma
$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Il termine $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ viene indicato con la lettera Δ ed è chiamato *discriminante* delle equazioni di terzo grado, perchè, come nel caso di quelle di secondo grado, pone una discriminazione tra le equazioni.

Mettiamo in pratica le nozione teoriche appena apprese attraverso i seguenti esempi.

1.1 Esempio nel caso $\Delta > 0$

Data l'equazione $3x^3 - 9x^2 + 3x - 9 = 0$ vogliamo trovare le sue soluzioni mediante la formula di Cardano.
Poniamo dunque $x = y - \frac{b}{3a}$ e, sostituendo nell'equazione di partenza, otteniamo $y^3 - 2y - 4 = 0$.
Calcoliamo ora il discriminante:
$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 4 - \frac{8}{27} = \frac{100}{27}$
ora applicando la formula finale $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$
quindi $y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}}$
dunque scriviamo $y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{9}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{9}}}$; dato che la radice cubica dà tre risultati dei nove che troveremo solo tre saranno accettabili:

$$u_1 = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} \qquad u_2 = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{2}{3}\pi} \qquad u_3 = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$v_1 = \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} \qquad v_2 = \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{2}{3}\pi} \qquad v_3 = \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

Le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} y = u + v \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} \tag{1}$$

Per ricavare le soluzioni da $y = u + v$ dobbiamo cercare quelle che $uv = -p/3 = 2/3$

$$u_1v_1 = \frac{2}{3} \qquad u_1v_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i/ \qquad u_1v_3 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$u_2v_1 = u_1v_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \qquad u_2v_2 = u_1v_3 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i \qquad u_2v_3 = \frac{2}{3}$$

$$u_3v_1 = u_1v_3 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i \qquad u_3v_2 = u_2v_3 = \frac{2}{3} \qquad u_3v_3 = u_2v_1 = u_1v_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

I risultati, a conferma della teoria nel caso $\Delta > 0$, sono $y_1 = u_1 + v_1$, $y_2 = u_2 + v_3$ e $y_3 = u_3 + v_2$

$$y_1 = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} = 2 \; *(\textit{vedi appendice})$$

$$y_2 = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{2}{3}\pi} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{4}{3}\pi} = -1 + i$$

$$y_3 = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{4}{3}\pi} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} \times e^{i\frac{2}{3}\pi} = -1 - i$$

Ora sostituiamo all'equazione iniziale $x = y - 1$ e otteniamo le tre soluzioni

$$x_1 = y_1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$x_2 = y_2 + 1 = -1 + 1 + i = i$$

$$x_3 = y_3 + 1 = -1 + 1 - i = -i$$

E' inutile citare anche il caso in cui $\Delta = 0$ poiché il procedimento è il medesimo di quello appena svolto.

1.2 Esempio nel caso $\Delta < 0$

Risolviamo ora l'equazione $x^3 + 12x^2 + 41x + 42 = 0$ il cui $\Delta < 0$.
Ora sostituiamo $x = y - 4$ e otteniamo $y^3 - 7y + 6 = 0$ il cui $\Delta = -\frac{100}{27}$

Troviamo ora u^3 e v^3 che sono uguali $-\frac{6}{2} \pm \sqrt{-\frac{100}{27}} = -3 \pm \frac{10\sqrt{3}}{9}i$.

Svolgiamo la radice cubica e troviamo:

$$u_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{6} \qquad u_2 = 1 + \frac{2\sqrt{3}i}{3} \qquad u_3 = \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}i}{6}$$

$$v_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{6} \qquad v_2 = \frac{1}{2} + \frac{-5\sqrt{3}i}{6} \qquad v_3 = 1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3}$$

Scegliamo ora i risultati per cui $uv = 7/3$. Le coppie sono $(u_1; v_1)$, $(u_2; v_3)$ e $(u_3; v_2)$.

Troviamo le soluzione sapendo che $y = u + v$

$$y_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{6} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{6} = -3$$
$$y_2 = 1 + \frac{2\sqrt{3}i}{3} + 1 - \frac{2\sqrt{3}i}{3} = 2$$
$$y_3 = \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}i}{6} + \frac{1}{2} + \frac{-5\sqrt{3}i}{6} = 1$$

Dunque essendo $x = y - 4$

$$x_1 = -7 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -3$$

2 Metodo di risoluzione trigonometrico

Dopo aver studiato la formula di Cardano per la risoluzione delle equazioni di terzo grado, analizzeremo ora un metodo alternativo teorizzato da François Viète (1540-1603), matematico francese che avendo individuato un'analogia tra l'equazione cubica: $y^3 + px + q = 0$, alla base della formula di Cardano, e la triplicazione del coseno: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, ottenne un metodo risolutivo valido per alcune equazioni cubiche.
Considerando la triplicazione del coseno: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ eseguiamo un cambio di variabile ponendo $\cos\alpha = t$ e $\cos 3\alpha = l$ necessariamente con $-1 \leq l \leq 1$.
A questo punto otteniamo l'equazione:

$$4t^3 - 3t - l = 0$$

Riportiamo ora un esempio che verifichi l'effettiva analogia individuata da Viète partendo dall'equazione $x^3 - 6x + 4 = 0$. Innanzitutto modifichiamo l'equazione in modo che corrisponda alla formula della triplicazione del coseno; moltiplichiamo entrambi i membri per quattro ottenendo:

$$4x^3 - 24x + 16 = 0$$

a questo punto sostituiamo a x il prodotto mt e dividiamo entrambi i membri per m^3 ottenendo:

$$4t^3 - \frac{24}{m^2} + \frac{16}{m^3} = 0$$

Ora dobbiamo porre il coefficiente del termine di primo grado uguale a -3, da ciò risulta che ovviamente $m = \pm 2\sqrt{2}$, scegliamo quindi arbitrariamente la soluzione positiva dato che, indipendentemente dalla scelta, otterremmo le stesse soluzioni.
A questo punto l'equazione diventa:

$$4t^3 - 3t + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

e possiamo quindi applicare il metodo di Viéte.

Sappiamo che il termine noto, che abbiamo chiamato l, è uguale a $\cos 3\alpha$; ora con la funzione arcocoseno troviamo che:

$$3\alpha = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \qquad \vee \qquad 3\alpha = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

da cui deriva che:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \qquad \vee \qquad \alpha = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi.$$

Possiamo calcolare le soluzioni dell'equazione di partenza sostituendo a k, per entrambi gli angoli α, i valori 0, 1 e 2 otteniamo i 6 angoli

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4},\ \alpha_2 = \frac{11}{12}\pi,\ \alpha_3 = \frac{19}{12}\pi, \qquad \alpha_4 = \frac{5}{12}\pi,\ \alpha_5 = \frac{13}{12}\pi,\ \alpha_6 = \frac{21}{12}\pi$$

le soluzioni sono date dal coseno di questi angoli ma, essendo questi esplementari a 2 a 2, le soluzioni effettive saranno 3:

$$t_1 = \cos\alpha_1 = \cos\alpha_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_2 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_5 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$t_3 = \cos\alpha_3 = \cos\alpha_4 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Con il metodo appena descritto si possono risolvere solo equazioni il cui termine noto è compreso tra 1 e -1; ci proponiamo ora di dimostrare, che stando alla suddetta condizione, si ottengono sempre tre soluzioni reali, in quanto, applicando la formula di Cardano otterremmo sempre $\Delta < 0$.

Teorema Nell'equazione $x^3 + px + q = 0$ il Δ è negativo se e solo se l'equazione equivalente $4t^3 - 3t - l = 0$ ha $|l| < 1$. Essa potrà quindi essere risolta con il metodo di Viète.

Dimostrazione. Per prima cosa modifichiamo la prima equazione moltiplicando tutto per 4, sostituendo ad x il prodotto mt e dividendo tutto per m^3; l'equazione che otteniamo è $4t^3 + \frac{4p}{m^2} + \frac{4q}{m^3}$. Poniamo ora $\frac{4p}{m^2} = -3$ e $\frac{4q}{m^3} = -l$ ricavando che $p = -\frac{3m^2}{4}$ e $m^3 = -\frac{4q}{l}$. Torniamo ora alla prima equazione, che avrà soluzioni reali (e quindi risolvibili con il metodo di Viète) solo se $\Delta < 0$.

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \text{ quindi } 4p^3 + 27q^2 < 0;$$

sostituiamo a p il fattore ricavato prima

$$4\left(-\frac{3m^2}{4}\right)^3 + 27q^2 < 0$$

e semplifichiamo

$$-\frac{27m^6}{16} + 27q^2 < 0$$

a questo punto eleviamo al quadrato il termine m^3 ricavato prima che sarà $m^6 = \frac{19q^2}{l^2}$ in modo da rendere la disequazione

$$-\frac{16q^2}{l^2} \cdot \frac{1}{16} + q^2 < 0.$$

Riducendo e facendo denominatore comune la disequazione risulta

$$\frac{-q^2 + d^2q^2}{l^2} < 0$$

e possiamo moltiplicare per l^2 per togliere il denominatore (non ci sono problemi con i segni in quanto $l^2 > 0$). Ora raccogliamo q^2

$$q^2(-1 + l^2) < 0$$

dividiamo quindi per q^2 in quanto sempre positivo e otteniamo che

$$l^2 < 1 \rightarrow -1 < l < 1 \rightarrow |l| < 1 \blacksquare$$

2.1 Formula generale

Consideriamo l'equazione generale:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

con coefficienti reali. Se poniamo

$$x = y - \frac{b}{3a}, \qquad \text{si ottiene} \qquad y^3 + py + q = 0$$

dove

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3} \quad .$$

Operando un cambio di variabile poniamo $y = mt$ e moltiplichiamo per quattro ottenendo :

$$4t^3 + \frac{4pt}{m^2} + \frac{4q}{m^3} = 0 \quad ,$$

ora uguagliamo $\frac{4p}{m^2}$ a -3 ricavando

$$m = \pm\sqrt{\frac{-4p}{3}},$$

quindi sostituiamo il valore di m, arrivando all'equazione

$$4t^3 - 3t + \frac{3\sqrt{3}q\sqrt{-p}}{2p^2}$$

Confrontando quest'equazione con la triplicazione del coseno, poniamo

$$\cos 3\alpha = -\frac{3\sqrt{3}q\sqrt{-p}}{2p^2} \text{ quindi } 3\alpha = \pm \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}q\sqrt{-p}}{2p^2}\right) + 2k\pi.$$

Ricaviamo che

$$\alpha_1 = \pm\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}q\sqrt{-p}}{2p^2}\right) + \frac{2k\pi}{3}$$

quindi dato che $t_1 = \cos\alpha_1$

$$t_1 = \cos\left[\pm\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}q\sqrt{-p}}{2p^2}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right] \qquad \text{con } k = 0, 1, 2$$

avremo che

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{3a} = mt_1 - \frac{b}{3a}$$

quindi la formula finale risulta

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{-p}\cos\left[\pm\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}q\sqrt{-p}}{2p^2}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right] - \frac{b}{3a} \text{ con } k = 0, 1, 2 \ .$$

Facciamo ora una prova utilizzando questa formula per risolvere l'equazione

$$x^3 + 12x^2 + 41x + 42 = 0$$

con $p = -7$ e $q = 6$. Sostituiamo nella formula risolutiva e troviamo che

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{7}\cos\left[\pm\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{7}}{98}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right] - 4$$

e sostituendo $k = 0, 1, 2$ otteniamo le soluzioni

per $k = 0$ $x = -2$ per $k = 1$ $x = -7$ per $k = 2$ $x = -3$

3 Equazioni di quarto grado

Come detto nell'introduzione, il primo a delineare un metodo per la risoluzione delle equazioni di quarto grado fu Ferrari, il cui metodo si basa su scomposizioni e quadrati che verrà proposto di seguito.

3.1 Metodo di Ferrari

Proviamo a risolvere un equazione di questo tipo attraverso l' esempio seguente.

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

Per essere risolta, l' equazione di quarto grado deve essere ricondotta nella forma $y^4 + py^2 + q = ry$.

La cosa è sempre possibile, in quanto ogni equazione nella forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ si riconduce in tale forma ponendo $x = y - \dfrac{b}{4a}$

Poniamo $x = y + \dfrac{1}{4}$ alla nostra equazione di partenza che diventa:

$$y^4 + \frac{13}{8}y^2 - \frac{2275}{256} = \frac{25}{8}y$$

Per prima cosa si porta il membro di sinistra ad essere il quadrato di un binomio. Per fare ciò, si aggiunge ad entrambi i membri dell'equazione la quantità $(2\sqrt{q} - p)y^2$, ottenendo:

$$y^4 + \frac{13}{8}y^2 + \left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8}\right)y^2 - \frac{2275}{256} = \frac{25}{8}y + \left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8}\right)y^2$$

Svolgendo i calcoli ricaviamo

$$y^4 + \frac{5\sqrt{91}i}{8}y^2 - \frac{2275}{256} = \frac{25}{8}y + \left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8}\right)y^2$$

Notiamo che il membro di sinistra è il quadrato del binomio $y^2 + \frac{5\sqrt{91}i}{16}$, quindi:

$$\left(y^2 + \frac{5\sqrt{91}i}{16}\right)^2 = \frac{25}{8}y + \left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8}\right)y^2$$

Si aggiunge ad entrambi i membri l' incognita z, e si porta il membro a sinistra ad essere il quadrato di un trinomio, aggiungendo le quantità opportune ad entrambi i membri:

$$\left(y^2 + \frac{5\sqrt{91}i}{16}\right)^2 + z^2 + 2zy^2 + \frac{5\sqrt{91}iz}{8} = \frac{25}{8}y + \left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8}\right)y^2 + z^2 + 2zy^2 + \frac{5\sqrt{91}iz}{8}$$

In tal modo otteniamo un trinomio nella seguente forma:

$$\left(y^2 + \frac{5\sqrt{91}i}{16} + z\right)^2 = \frac{25}{8}y + \left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8}\right)y^2 + z^2 + 2zy^2 + \frac{5\sqrt{91}iz}{8}$$

Ora trasformiamo il membro di destra in modo che diventi il quadrato di un binomio. Per fare questo imponiamo che sia nullo il discriminante dell'equazione associata a tale polinomio. Riscriviamo il polinomio come equazione di scondo grado nella variabile y:

$$\left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8} + 2z\right)y^2 + \frac{25}{8}y + z^2 + \frac{5\sqrt{91}iz}{8} = 0$$

$$\Delta = \frac{625}{64} - 4\left(\frac{5\sqrt{91}i}{8} - \frac{13}{8} + 2z\right)\left(z^2 + \frac{5\sqrt{91}iz}{8}\right)$$

ponendo il delta uguale a zero otteniamo un' equazione di terzo grado in z che si risolve con la formula di Cardano:

$$512z^3 + (-416 + 480\sqrt{91}i)z^2 + (-9100 - 260\sqrt{91}i)z - 625 = 0$$

Le soluzioni sono le seguenti:

$$z_1 = \frac{15}{16} - \frac{5\sqrt{91}i}{16} \qquad z_2 = -\frac{1}{16} - i\left(\frac{5\sqrt{91}}{16} + 3\right) \qquad z_3 = -\frac{1}{16} + i\left(3 - \frac{5\sqrt{91}}{16}\right)$$

Ora tutti 3 questi valori, sostituiti a z fanno diventare nullo il determinante dell'equazione, e quindi trasformano il polinomio

$$\frac{25}{8}y+\left(\frac{5\sqrt{91}i}{8}-\frac{13}{8}\right)y^2+z^2+2zy^2+\frac{5\sqrt{91}iz}{8}$$

in un quadrato di binomio:

1. con z_1 diventa $\left(\frac{4y+25}{8}\right)^2$
2. con z_2 diventa $\left(-\frac{7}{4}-6i\right)\left(y-\frac{7}{100}+\frac{6}{25}i\right)^2$
3. con z_3 diventa $\left(-\frac{7}{4}+6i\right)\left(y-\frac{7}{100}-\frac{6}{25}i\right)^2$

Quindi riprendendo l'equazione iniziale

$$\left(y^2+\frac{5\sqrt{91}i}{16}+z\right)^2=\frac{25}{8}y+\left(\frac{5\sqrt{91}i}{8}-\frac{13}{8}\right)y^2+z^2+2zy^2+\frac{5\sqrt{91}iz}{8}$$

e sostituendo z_1, z_2 e z_3 otteniamo 3 equazioni:

1. $\left(y^2+\frac{15}{16}\right)^2=\left(\frac{4y+25}{8}\right)^2$
2. $\left(y^2-\frac{1}{16}-3i\right)^2=\left(-\frac{7}{4}-6i\right)\left(y-\frac{7}{100}+\frac{6}{25}i\right)^2$
3. $\left(y^2-\frac{1}{16}+3i\right)^2=\left(-\frac{7}{4}+6i\right)\left(y-\frac{7}{100}-\frac{6}{25}i\right)^2$

quindi, ricordando che se $A^2=B^2$ si ottiene $A=B\vee A=-B$, allora:

1. $y^2+\frac{15}{16}=\frac{y}{2}+\frac{25}{8} \quad \vee \quad y^2+\frac{15}{16}=-\frac{y}{2}-\frac{25}{8}$
2. $y^2-\frac{1}{16}-3i=\left(\frac{3}{2}-2i\right)\left(y-\frac{7}{100}+\frac{6}{25}i\right) \quad \vee \quad y^2-\frac{1}{16}-3i=\left(\frac{3}{2}-2i\right)\left(-y+\frac{7}{100}-\frac{6}{25}i\right)$
3. $y^2-\frac{1}{16}+3i=\left(\frac{3}{2}+2i\right)\left(y-\frac{7}{100}-\frac{6}{25}i\right) \quad \vee \quad y^2-\frac{1}{16}+3i=\left(\frac{3}{2}+2i\right)\left(-y+\frac{7}{100}+\frac{6}{25}i\right)$

La radice, nell'insieme dei numeri complessi, di $-\frac{7}{4}+6i$ genera due numeri opposti $\frac{3}{2}-2i$ e $-\frac{3}{2}+2i$, ma possiamo utilizzarne uno solo poichè, per il gioco dei segni, le equazioni non aumentano. Questo vale anche per $-\frac{7}{4}-6i$.

Risolvendo le due equazioni, per ogni caso, otteniamo in tutti i casi le seguenti quattro soluzioni:

$$y_1=\frac{7}{4} \quad \vee \quad y_2=-\frac{5}{4} \quad \vee \quad y_3=\frac{1}{4}-2i \quad \vee \quad y_4=\frac{1}{4}+2i$$

Sostituendo alla sostituzione inizialmente fatta $x=y+\frac{1}{4}$ ciascuna di queste soluzioni otteniamo le quattro soluzione ricercate:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = -2i \qquad x_4 = 2i$$

Quindi l'equazione è da ritenersi risolta.

3.2 Metodo di Eulero

Questo metodo, tuttavia, non è l'unico possibile per poter risolvere le equazioni di quarto grado. Ne esiste un altro, ideato da Eulero, che ricalca il metodo di Tartaglia per le equazioni di terzo grado.

Data l'equazione:

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$$

Il primo passo per risolvere l'equazione è uguale a quello del metodo precedente: proponendo la sostituzione:

$$z = x - \tfrac{b}{4a}$$

ottenendo così l'equazione:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

dove p, q, ed r possono calcolarsi in maniera analoga a quanto fatto per l'equazione di 3^o grado, eseguendo le operazioni e semplificando, e comunque sono dipendenti dai coefficienti a, b, c, d ed e.
Per risolvere l' equazione precedente poniamo:

$$x = u + v + w$$

e ne facciamo il quadrato:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw)$$

quadrando ancora otteniamo:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w)$$

a questo punto portiamo il membro di destra a sinistra e poiché $x = u + v + w$, otteniamo:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvwx + (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = 0$$

Quest'ultima equazione coincide con l' equazione iniziale ossia, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, se i numeri u, v, w sono scelti in modo che risulti:

$$\begin{cases} -2(u^2 + v^2 + w^2) = p \\ -8uvx = q \\ (u^2 + v^2 + w^2) - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = r \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \dfrac{p^2 - 4r}{16} \\ uvw = -\dfrac{q}{8} \end{cases}$$

Elevando al quadrato l'ultima equazione del sistema abbiamo (con tutte le considerazioni fatte per le equazioni di terzo grado):

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2=\dfrac{p^2-4r}{16} \\ u^2v^2w^2=\dfrac{q^2}{64} \end{cases}$$

Ora è necessario applicare il seguente teorema:

Teorema Per trovare n numeri conoscendone la somma σ_1, la somma dei loro prodotti a due a due σ_2, la somma dei loro prodotti a tre a tre σ_3,...,il loro prodotto σ_n, bisogna risolvere l'equazione:

$$t^3-\sigma_1 t^2+\sigma_2 t-\sigma_3=0$$

Lo si può verificare con l'esempio seguente (dal momento che non esemplificheremo la dimostrazione completa). Data la seguente equazione

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0 \qquad \text{le cui soluzioni sono } x_1=a; \quad x_2=b; \quad x_3=c$$

moltiplicando otteniamo:

$$x^3-ax^2-bx^2+abx-cx^2+acx+bcx-abc=0$$

Raccogliendo i coefficienti di x^2 ed x otteniamo:

$$x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+ac+bc)-(abc)=0$$

che è proprio l'equazione del teorema sopra.

Tornando al sistema, per trovare u, v, w, dobbiamo, quindi, risolvere l'equazione:

$$t^3+\frac{p}{2}t^2+\frac{p^2-4r}{16}t-\frac{q^2}{64}=0$$

Questa è un'equazione di terzo grado che possiamo risolvere con il metodo di Cardano e si ottengono t_1, t_2 e t_3 . Dette t_1, t_2, t_3 le radici di questa equazione, si può assumere: $u^2=t_1$, $v^2=t_2$, $w^2=t_3$, ed essendo $x=u+v+w$ si conclude che:

$$x=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\ ($$

Ogni radicale ha due valori, tuttavia non vengono otto soluzioni, perché una volta fissati i valori u, v, w possiamo accettare solo quelle che soddisfano la condizione $uvw=-\frac{q}{8}$. Dunque le soluzioni saranno:

$$x_1=2; \qquad x_2=-1; \qquad x_3=-2i; \qquad x_4=2i$$

4 Equazioni di grado quinto o superiore

Abbiamo quindi dimostrato che esistono le formule per la risoluzione delle equazioni di grado terzo e quarto. Esistono anche per quelle di grado quinto o superiore? Purtroppo no. Ciò è stato provato da Paolo Ruffini e in seguito da Niels Henrik Abel.
La prova di Ruffini fu ideata dal matematico del valentanese (Viterbo) probabilmente attorno al 1804 prima della sua nomina socio dell'Accademia di Religione Cattolica di Roma. Questa prova non può essere considerata una dimostrazione dato che presenta alcune lacune. Queste vennero colmate con la dimostrazione di Abel, la quale si basa sul calcolo integrale, nel suo *Una proprietà generale di una classe estesissima di funzioni trascendenti* pubblicata nel 1841 presso l'Accademia delle Scienze di Parigi. Questo teorema afferma che non vi è una formula risolutiva per calcolare le soluzioni delle suddette equazioni però le soluzioni possono essere approssimate con vari metodi quali quello di Newton-Raphson o quello di Laguerre. La teoria di Galois rende chiare ed evidenti le motivazioni per le quali è possibile distinguere e risolvere le equazioni di grado quarto o inferiore. E' necessario specificare un criterio generale perché una particolare equazione polinomiale di un qualsiasi grado abbia le soluzioni esprimibili mediante operazioni algebriche e radicali.

***Nota sui radicali cubici**

In questo caso abbiamo ottenuto un radicale doppio cubico di forma $\sqrt[3]{m+n\sqrt{p}}$. Come per i radicali doppi alcuni di questi possono essere semplificati nel caso in cui il radicando della radice cubica sia un cubo di binomio. Introduciamo ordunque due nuove incognite, a e b per semplificare l'apprendimento di quanto appena esposto.

$$(a+\sqrt{b})^3 = a^3 + 3a^2\sqrt{b} + b\sqrt{b} + 3ab = (a^3+3ab) + (3a^2+b)\sqrt{b}$$

Quindi poniamo

$$m = a^3 + 3ab$$

$$n\sqrt{p} = (3a^2+b)\sqrt{b}$$

Per poter affermare che $b = p$ dobbiamo, fra le soluzioni del suddetto radicale, cercarne una di modo che $\frac{(n-p)}{3}$ sia un quadrato perfetto.

Scriviamo allora per far chiarezza il sistema

$$\begin{cases} b = p \\ a = \sqrt{\dfrac{(n-p)}{3}} \end{cases} \tag{2}$$

Si verifica dunque che

$$m = a^3 + 3ab$$

e nel caso i nostri calcoli vadano in porto, si riduce a

$$\sqrt[3]{m+n\sqrt{p}} = a + \sqrt{b}$$

Riprendiamo dunque la situazione precedente al fine di chiarire eventuali dubbi sulla riduzione appena spiegata e di farci capire come la somma di due radicali complicati possa essere uguale a 2.

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}} = 2$$

Prendiamo il primo radicale e lo poniamo uguale a $a+\sqrt{b}$:

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}} = a + \sqrt{b}$$

il quale può essere portato alla forma

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{3}{9}}} = \sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}} = a + \sqrt{b}$$

Poniamo

$$b = p = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

facendo diventare

$$a = \frac{(n-p)}{3} = \frac{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}}{3} = 1$$

Il nostro radicale diviene dunque

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Con lo stesso procedimento portiamo il secondo radicale alla forma

$$\sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}=1-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Non ci resta che sommare i due radicali semplificati:

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}=1+\sqrt{\frac{1}{3}}+1-\sqrt{\frac{1}{3}}=1+1=2$$

Il mistero è così risolto.