EQUAZIONI MATRICIALI

a cura di Gioella Lorenzon, Edoardo Sech, Lorenzo Spina, Jing Jing Xu
Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione del Prof. Fabio Breda
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2014/15

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è soffermarci sulla diversa applicazione delle proprietà delle operazioni a seconda degli insiemi a cui appartengono i termini delle operazioni stesse. In particolare confronteremo le operazioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e quelle nell'insieme $\mathbb{M}$ delle matrici. Porteremo come esempio la differenza nella risoluzione di equazioni con elementi appartenenti a insiemi diversi, conseguenza appunto del fatto che all'interno di insiemi diversi non valgono sempre tutti gli stessi teoremi.*

In un insieme $\mathbb{I}$ si dice operazione una legge che a partire da elementi appartenenti all'insieme $\mathbb{I}$ restituisce un elemento dello stesso insieme o di un insieme diverso. Non tutte le operazioni sono sempre uguali e possibili in qualsiasi insieme, ad esempio l'operazione di radice quadrata non è sempre possibile quando $\mathbb{I}=\mathbb{R}$, ma lo è sempre quando $\mathbb{I}=\mathbb{C}$.
Quali operazioni sono possibili e in che modo è possibile eseguirle nell'insieme $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ delle matrici, rispetto all'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali?

Siano A, B e C matrici dello stesso ordine con elementi appartenenti all'insieme $\mathbb{R}$ e α e β numeri reali. Le operazioni con le matrici godono delle seguenti proprietà:

1. Proprietà commutativa della somma:
$$A + B = B + A$$
2. Esistenza dell'elemento neutro dell'addizione, che è la matrice nulla o matrice zero i cui valori sono tutti uguali a zero ed è indicata con 0:
$$A + 0 = A$$
3. Esistenza dell'opposto di una matrice:
$$A + (-A) = 0 \qquad\qquad -A + A = 0$$
4. Proprietà associativa della somma e del prodotto:
$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad\qquad A(BC) = (AB)C$$

5. Proprietà distributive, sia a sinistra che a destra, del prodotto rispetto alla somma:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad\qquad (B+C)A = BA + CA$$

6. Proprietà commutativa del prodotto di una matrice per uno scalare:

$$\alpha A = A\alpha$$

7. Proprietà distributiva del prodotto di una matrice per uno scalare rispetto alla somma di matrici:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

8. Proprietà distributiva del prodotto di una matrice per uno scalare rispetto alla somma di scalari:

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

9. Proprietà associativa del prodotto di una matrice per uno scalare:

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

10. Prodotto per 1 e -1:

$$1A = A \qquad\qquad (-1)A = -A$$

E' importante sottolineare che per le operazioni matriciali non vale la proprietà commutativa del prodotto fra matrici e pertanto è sempre necessario esprimere se una matrice A va moltiplicata a destra o a sinistra di una matrice B, poiché $AB \neq BA$.

EQUAZIONI MATRICIALI

A partire dalle proprietà delle operazioni matriciali, formuleremo dei principi di equivalenza che valgono per equazioni che contengono matrici quadrate dello stesso ordine n.

I PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

- Sommando algebricamente a entrambi i membri di un'equazione una stessa matrice quadrata di ordine n o una espressione che generi una matrice di ordine n, indifferentemente a destra o a sinistra, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

II PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

- Moltiplicando entrambi i membri di un'equazione per uno stesso scalare diverso da 0, indifferentemente a destra o a sinistra, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.
- Moltiplicando ciascun membro per una stessa matrice quadrata di ordine n diversa da 0 o una espressione che generi una matrice di ordine n diversa da 0, o a destra o a sinistra di entrambi i membri, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Nella risoluzione di un'equazione algebrica in $\mathbb{R}$ si giunge alla sua forma normale, cioè $ax = b$ e a questo punto, applicando il II principio di equivalenza, si moltiplicano entrambi i membri per l'inverso di a. Mentre in queste equazioni l'unico numero che non ha l'inverso è lo 0, in $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ non è solo la matrice nulla a non avere la matrice inversa ma anche tutte le matrici singolari, pertanto le possibilità di applicare il II principio si riducono considerevolmente.

Equazioni di I grado

Le equazioni di I grado in $\mathbb{R}$ nella forma $ax + b = 0$ hanno sempre nessuna, infinite o una soluzione, ottenibile con l'applicazione dei principi di equivalenza. Sappiamo che l'impossibilità o l'indeterminabilità dell'equazione dipende da a e b:

- Se a=0 $\wedge$ b=0 l'equazione è indeterminata.
- Se a=0 $\wedge$ $b \neq$0 l'equazione è impossibile.

Nell'insieme $\mathbb{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate potremmo costruire equazioni del tipo $AX + B = 0$, in cui A e B potrebbero essere numeri reali o matrici; sottolineiamo che B è sempre il coefficiente della matrice identità. Applicando i principi di equivalenza delle equazioni matriciali è possibile giungere alla soluzione, a meno che l'equazione non sia impossibile o indeterminata. Questi casi si possono verificare se la matrice A è singolare:

- Se A=0 $\wedge$ B=0 l'equazione è indeterminata, come per le equazioni in $\mathbb{R}$.
- Se A=0 $\wedge$ $B \neq$0 l'equazione è impossibile, come per le equazioni in $\mathbb{R}$.
- Se $A \neq$0 l'equazione è indeterminata o impossibile. Per determinare se l'equazione è indeterminata o impossibile dobbiamo utilizzare il teorema di Rouché-Capelli.

Vediamo alcuni esempi di equazioni matriciali di I grado.

Esempio. Data l'equazione

$$A + X = 3B - C - X$$

dove A, B, C e X sono matrici quadrate dello stesso ordine. Applichiamo il I principio di equivalenza delle equazioni aggiungendo a ciascuno dei due termini $X - A$. Aggiungere $X - A$ a destra o a sinistra dei termini dell'equazione è indifferente, perché nell'addizione di matrici vale la proprietà commutativa.

$$X - A + A + X = X - A + 3B - C - X$$

Nell'addizione di matrici, oltre alla proprietà commutativa, vale anche quella associativa, perciò possiamo scrivere:

$$(-A + A) + (X + X) = (X - X) + (-A + 3B - C)$$

Per le proprietà della matrice opposta, possiamo dire:

$$0 + 2X = 0 - A + 3B - C$$

Applicando il II principio di equivalenza delle equazioni matriciali:

$$X = \frac{1}{2}(-A + 3B - C)$$

E per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C$$

Esempio. Data l'equazione

$$AX = B$$

dove A, B, X sono matrici quadrate dello stesso ordine, se A non è singolare possiamo trovare la sua matrice inversa A^{-1} e quindi applicare il II principio di equivalenza delle equazioni matriciali, moltiplicando A^{-1} alla sinistra di entrambi i membri dell'equazione:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Ovvero, per la definizione della matrice identità:

$$IX = A^{-1}B$$

Cioè:

$$X = A^{-1}B$$

Se invece A è singolare distinguiamo i tre casi:

- A=0 $\wedge$ B=0 equazione indeterminata.
- A=0 $\wedge$ $B \neq$0 equazione impossibile.
- Se $A \neq$0 equazione indeterminata o impossibile. Per determinare se l'equazione è indeterminata o impossibile utilizziamo il teorema di Rouché-Capelli.

Negli esempi appena illustrati, per la risoluzione delle equazioni sono state utilizzate due operazioni: la somma e il prodotto. Perché queste due operazioni siano sempre possibili all'interno di un insieme tutti gli elementi dell'insieme, escluso lo 0, devono avere un opposto e un inverso. Questo accade in insiemi come quello dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ o quello dei numeri reali $\mathbb{R}$, che sono entrambi dei campi (tutti gli elementi diversi da 0 hanno l'inverso), ma non è vero nell'insieme delle matrici $\mathbb{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ con $n \geq 2$ che è infatti un anello non commutativo (non tutti gli elementi diversi da 0 hanno l'inverso; il prodotto non gode della proprietà commutativa). Infatti, si noti come nel secondo esempio è possibile applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni matriciali solo se la matrice A non è singolare.

Equazioni di II grado

Un'operazione legata alle equazioni di secondo grado è l'estrazione di radice quadrata. Poiché nell'insieme $\mathbb{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ matrici diverse moltiplicate per se stesse possono dare la stessa matrice, esiste più di una radice quadrata di una matrice. L'estrazione della radice quadrata di una matrice è un'operazione abbastanza complessa, quindi ci limiteremo a soffermarci sulla radice quadrata della matrice 0 (matrice quadrata con n=2).

Esempio. $X^2 = 0$

Mentre per quanto riguarda i numeri reali la radice del numero 0 è piuttosto scontato che sia $\sqrt{0} = 0$, in $\mathbb{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ anche la matrice 0 ha più di una radice quadrata, perché esiste più di una matrice che moltiplicata per se stessa dà come risultato 0.

Risolviamo quindi l'equazione matriciale di secondo grado $X^2 = 0$, con X e 0 matrici quadrate di ordine n=2.

Abbiamo:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ xy + yt = 0 \\ xz + tz = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla II e dalla III equazione del sistema otteniamo: $y(x+t)=0$ e $z(x+t)=0$, che hanno come soluzioni rispettivamente $y=0 \vee x=-t$ e $z=0 \vee x=-t$.

Analizziamo i tre casi:

$y=0$:

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ z(x+t) = 0 \\ t^2 = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ \forall z \in \mathbb{R} \\ t = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

$z=0$:

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ y(x+t) = 0 \\ 0 = 0 \\ t^2 = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R} \\ 0 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x=-t$:

$$\begin{cases} t^2 + yz = 0 \\ 0 = 0 \\ z(-t+t) = 0 \\ yz + t^2 = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} yz = -t^2 \\ 0 = 0 \\ \forall z \in \mathbb{R} \\ yz = -t^2 \end{cases}$$

Cioè:

$$\begin{bmatrix} -t & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

con y e z tali che $yz = -t^2$.

Pertanto, l'equazione $X^2 = 0$ ha infinite soluzioni, del tipo: $\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -t & y \\ z & t \end{bmatrix}$ con $yz = -t^2$