LE MATRICI NEL PIANO

A cura di Buffon Laura, Carniel Chiara, Lucchetta Jessica, Spadetto Luca

Realizzato nell'ambito del ***Progetto Archimede***
con la supervisione del Prof. F.Zampieri
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, Gennaio 2015

Sommario

In questo articolo ci occuperemo della applicazione del calcolo matriciale alla geometria analitica del piano, vedendo come questa parte dell'algebra delle matrici consente di risolvere alcuni problemi di ordine metrico (calcolo di aree) e di disporre di un utile strumento per lo studio delle trasformazioni geometriche. Nella prima parte verrà presa in esame la formula di Gauss, che, inizialmente dimostrata per i triangoli, consente di determinare l'area della superficie di un poligono di n lati, di cui si conoscano le coordinate degli n vertici: le formule di calcolo sono facilmente scrivibili in termini di determinanti di opportune matrici. Nella seconda parte vedremo invece come il formalismo matriciale costituisce un valido ausilio per determinare le coordinate di un punto P', trasformato del punto P tramite una determinata relazione detta trasformazione geometrica, che, essendo descritta da opportune relazioni fra le coordinate dei punti P e P', può essere descritta e studiata in termini di una opportuna matrice.

1 Formula di Gauss per l'area del triangolo

Una prima applicazione del formalismo matriciale ai problemi di geometria piana è costituita dalla cosiddetta formula di Gauss per l'area di un triangolo ABC disegnato su un piano cartesiano, disponendo quindi delle coordinate dei tre vertici. Questa formula, appresa quasi mnemonicamente nella classe prima Liceo Scientifico, a proposito delle proprietà metriche del piano cartesiano,permette di calcolare l'area del triangolo grazie al calcolo del determinante di una matrice quadrata 3×3, costruita a partire dalle coordinate dei vertici.

Sia dato il triangolo ABC i cui vertici hanno coordinate $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$.

Come è noto, l'area S_{ABC} è data dalla seguente formula detta di Gauss:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|D|$$

ove con $|D|$ si indica il valore assoluto del determinante D così calcolato:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Questa formula è di utilizzo abbastanza semplice, se si sa calcolare il determinante D (di una matrice 3×3, tramite la regola di Laplace o di Sarrus.

Nel seguito è riportata la nostra dimostrazione della formula.

In riferimento alla fig.1, notiamo che l'area del triangolo ABC si può ottenere togliendo all'area del rettangolo $ADEF$ l'area dei tre triangoli rettangoli BEC, CFA e ADB.

- L'area del triangolo BEC è data da $\frac{1}{2} \cdot (x_B - x_C) \cdot (y_B - y_C)$

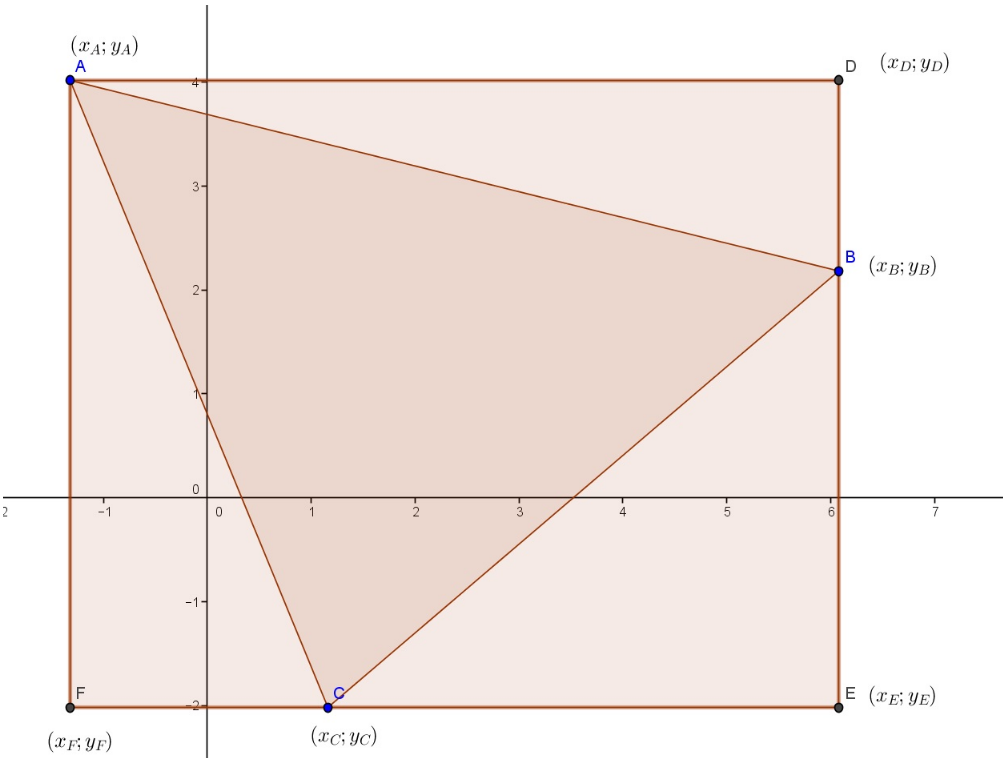

Figura 1: Un triangolo ABC inscritto in un rettangolo $ADEF$

- L'area del triangolo AFC è data da $\frac{1}{2} \cdot (x_C - x_A) \cdot (y_A - y_C)$
- L'area del triangolo ADB è data da $\frac{1}{2} \cdot (x_B - x_A) \cdot (y_A - y_B)$
- L'area del rettangolo $ADEF$ è data da $(x_B - x_A) \cdot (y_A - y_C)$

Quindi, l'area del triangolo ABC di partenza è data da:

$$S_{ABC} = (x_B - x_A) \cdot (y_A - y_C) - \frac{1}{2}\left((x_B - x_C) \cdot (y_B - y_C) + (x_C - x_A) \cdot (y_A - y_C) + (x_B - x_A) \cdot (y_A - y_B)\right)$$

Sviluppando i prodotti e raccogliendo il fattore $\frac{1}{2}$ si ha:

$$S_{ABC} = \frac{x_B y_A - x_B y_C + x_A y_C - x_A y_B + x_C y_B - x_C y_A}{2}$$

che si può scrivere come:

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2} \cdot \left(x_A(y_B - y_C) - x_B(y_A - y_C) + x_C(y_A - y_B)\right)$$

Ricordando ora la definizione di determinante di una matrice 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{12}$$

possiamo dire che:

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2} \cdot \left(x_A \cdot \begin{vmatrix} y_B & 1 \\ y_C & 1 \end{vmatrix} - x_B \cdot \begin{vmatrix} y_A & 1 \\ y_C & 1 \end{vmatrix} + x_C \cdot \begin{vmatrix} y_A & 1 \\ y_B & 1 \end{vmatrix} \right) \tag{1}$$

Ricordando ora la regola di Laplace per il determinante di una matrice 3×3, possiamo infine affermare che:

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppando rispetto alla prima colonna si ottiene, infatti, (1)

1.1 Formula di Gauss per l'area dei quadrilateri generici

Conoscendo i vertici di un quadrilatero generico, è possibile calcolarne l'area tramite la formula:

$$A = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4|$$

Difatti, l'area di un qualsiasi quadrilatero $ABCD$ si può ottenere dalla somma delle aree dei due triangoli ABC e DBC. Facendo quindi riferimento alla formula di Gauss per l'area del triangolo, se $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3$, $D(x_4, y_4)$, si ha:

$$S_{ABCD} = S_{ACB} + S_{CBD} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppando entrambi i determinanti rispetto alla prima riga si ha la formula richiesta.

2 Trasformazioni geometriche con le matrici

Le matrici sono utili anche ai fini dello studio delle trasformazioni geometriche sul piano cartesiano.

2.1 Traslazioni

Consideriamo un vettore v. Si dice traslazione τ di vettore $\vec{v}$ la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che associa ad un punto qualsiasi A del piano il punto A' tale che il vettore $\overrightarrow{AA'}$ sia equipollente a $\vec{v}$.

Passando alle componenti si hanno le equazioni τ :

$$\tau : \begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases} \tag{2}$$

L'equazione matriciale della traslazione di vettore $v = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ è:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Nel caso esaminato in fig.2, possiamo osservare che il punto $A(1, 3)$ è stato traslato di $\vec{v}(3, 4)$. In base alle equazioni viste, si può dire che il punto A', traslato di A ha coordinate (x', y') date da:

$$\begin{cases} x' = 1 + 3 = 4 \\ y' = 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

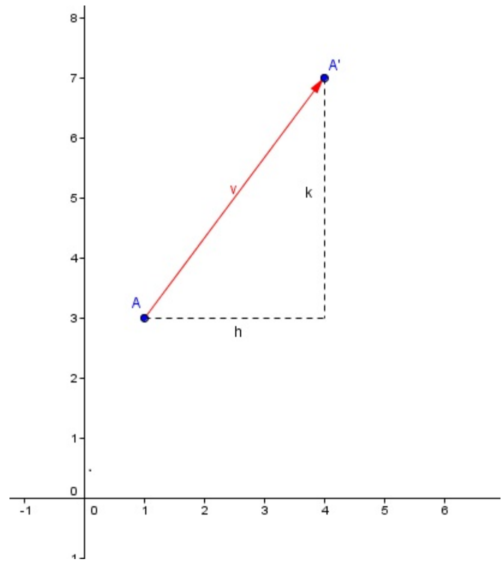

Figura 2: traslazione

Quindi otteniamo $A'(4,7)$.

Possiamo ottenere lo stesso risultato con la forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2.2 Rotazioni

In un piano si chiama rotazione ρ di centro O individuata dall'angolo orientato θ, la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che al punto O associa il punto stesso, ad ogni altro punto A associa il punto A' tale che l'angolo tra $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OA'}$ sia congruente e concorde ad θ i segmenti OA e OA' siano congruenti.

La matrice associata risulta da:

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \overrightarrow{OP'} = x\mathbf{i'} + y\mathbf{j'}$$

$$\mathbf{i'} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{j'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + 90°) \\ \sin(\theta + 90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

dunque la trasformazione è data dalle equazioni vettoriali

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e la matrice associata è

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Facendo un esempio, possiamo considerare il vettore $\vec{v}(1,3)$ a cui applichiamo una rotazione di $\theta = \frac{\pi}{2}$, in senso antiorario, otteniamo, per la matrice R:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

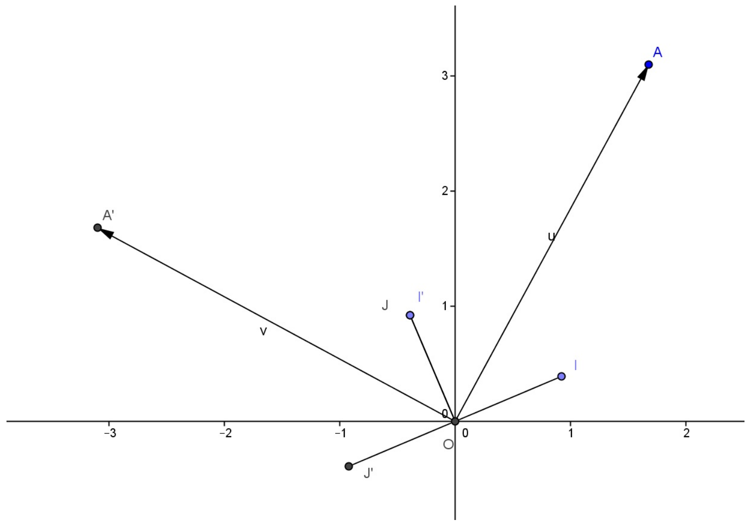

Figura 3: Rotazione

.

In base alle equazioni viste:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Simmetria centrale

Si chiama simmetria centrale di centro O, la corrispondenza biunivoca fra i punti del piano, che ad ogni punto A associa il punto A' del piano simmetrico di A rispetto al punto O.

Se il centro è O, poichè **i'** = **-i** e **j'** = **-j**, la matrice della simmetria di centro O è $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Di fatto, questa trasformazione è una rotazione di $\theta = \pi$.

Se il centro non è O, si procede come per le rotazioni: il centro $C \equiv (x_0, y_0)$ è portato nell'origine dalla traslazione di equazione $\vec{x'} = \vec{x} + \vec{v} = \vec{x} + \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{bmatrix}$, la simmetria è individuata da:

$$x' = Ax + (Av - v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}.$$

Di fatto quindi, una simmetria assiale è la composizione di una rotazione di π attorno al centro della simmetria e di una traslazione di un vettore doppio rispetto a quello che designa il centro di rotazione stesso.

Facendo un esempio, applichiamo al vettore $\vec{v}(2, 1)$ una simmetria centrale di centro $(1, -1)$. Per quanto visto:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

.