# IL METODO DI RIDUZIONE DI GAUSS

A cura di D'Agostino Andrea, Foltran Alberto, Peccolo Simone, Sadak Ikram

Realizzato nell'ambito del ***Progetto Archimede***
con la supervisione del Prof. F.Zampieri
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, Gennaio 2015

**Sommario**

*In questo articolo ci occuperemo dello studio del metodo di riduzione di Gauss, che permette di trasformare una qualsiasi matrice quadrata in forma triangolare o diagonale. La trasformazione di una matrice in forma ridotta consente di agevolare, ad esempio, la soluzione di un sistema lineare.*

## 1 Un po' di storia

Tracce dell'utilizzo di matrici risalgono fino ai primi secoli a.C. Nel corso della storia più volte è capitato che matematici vissuti in epoche e luoghi diversi, durante lo studio di sistemi lineari, abbiano disposto i coefficienti del sistema in forma tabellare, fatto che evidenzia come le matrici siano una struttura particolarmente intuitiva e conveniente per questi scopi. Fu solo a partire dal XVII secolo comunque che l'idea delle matrici fu ripresa e sviluppata, prima con risultati e idee ottenuti in contesti di studio specifici, poi con la loro generalizzazione. Lo sviluppo infine è continuato fino a dare alla teoria delle matrici la forma che oggi conosciamo.
I primi a sfruttare le matrici per agevolare i propri calcoli furono i matematici cinesi, proprio nell'affrontare i sistemi lineari. Nel libro cinese "Jiuzhang Suanshu" diviso in nove capitoli e steso durante la dinastia Han, l'ottavo capitolo è interamente dedicato allo svolgimento di un problema matematico formulato sotto forma di sistema lineare. L'autore dispone ingegnosamente i coefficienti di ogni equazione parallelamente in senso verticale, in maniera quindi differente dalla notazione odierna, che li vuole disposti orizzontalmente, per righe: una semplice differenza di notazione.
Ai numeri così disposti venivano poi applicate una serie di operazioni portandoli in una forma tale da rendere evidente quale fosse la soluzione del sistema: era stato applicato quello che oggi conosciamo come metodo di eliminazione gaussiana, che sarà scoperto in occidente solo agli inizi del XIX secolo con gli studi del matematico tedesco Carl Friedrich Gauss.
A partire dalla seconda metà del XX secolo l'avvento dei computer ha dato un'impressionante accelerazione alla diffusione delle matrici e dei metodi matriciali. Grazie ai computer infatti è stato possibile applicare in maniera efficiente metodi iterativi precedentemente ritenuti troppo onerosi, portando di conseguenza allo sviluppo di nuove tecniche per la risoluzione di importanti problemi dell'algebra lineare, quali il calcolo degli autovettori e autovalori, il calcolo dell'inversa di una matrice e la risoluzione di sistemi lineari. Ciò a sua volta ha permesso l'introduzione delle matrici in altre discipline applicate, come per esempio la matematica economica e la probabilità, che grazie ad esse hanno potuto rappresentare concetti complessi in maniera più semplice. Altri campi relativamente più recenti, invece, come per esempio la ricerca operativa, hanno basato ampiamente la propria disciplina sull'utilizzo delle matrici.

## 2 Le mosse di Gauss

Consideriamo una matrice quadrata di ordine $n$, ossia una struttura di elementi (di solito numeri) organizzati in $n$ righe e $n$ colonne. Nel caso $n = 3$, ad esempio, la matrice $A$ è così rappresentata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Gli elementi con uguale numero di riga e colonna (nel nostro caso $a_{11}$, $a_{22}$ e $a_{33}$ costituiscono la *diagonale principale*). *Triangolarizzare* una matrice quadrata significa fare in modo che tutti gli elementi al di sotto della sua diagonale principale (nel nostro caso $a_{21}$, $a_{31}$ e $a_{32}$ siano uguali a zero. *Diagonalizzarla* invece vuol dire azzerare tutti gli elementi al di fuori della diagonale.

Per procedere alla queste trasformazioni, è necessario seguire le mosse di Gauss, ossia una serie di operazioni fra le righe della matrice che possono essere:

- scambiare due righe: in seguito denoteremo con $(m) \leftrightarrow (n)$ l'operazione consistente nello scambiare la riga (1) con la riga $(n)$
- moltiplicare una riga per un numero diverso da zero: nel seguito, con $(n) \cdot k$ indicheremo che la riga $(n)$ è stata moltiplicata per $k$;
- sommare una riga ad un multiplo di un'altra : nel seguito, con $(m) + k \cdot (n)$ indicheremo che la riga $(m)$ è stata sommata alla riga $(n)$ moltiplicata per $k$.

### 2.1 Forma triangolare di una matrice

Per trasformare una matrice $3 \times 3$ in forma triangolare, è necessario azzerare gli elementi nel seguente ordine: $a_{31}; a_{32}; a_{21}$

Vediamo in dettaglio come viene effettuata questa operazione:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow (3) \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{31}}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} \cdot \frac{a_{21}}{a_{31}} & -a_{32} \cdot \frac{a_{21}}{a_{31}} & -a_{33} \cdot \frac{a_{21}}{a_{31}} \end{pmatrix} \Rightarrow (2) + (3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{32} \cdot a_{21}}{a_{31}} & a_{23} - \frac{a_{33} \cdot a_{21}}{a_{31}} \end{pmatrix}$$

Come si può osservare, queste due mosse di Gauss hanno consentito di ottenere una matrice in cui l'elemento $a_{31} = 0$.

$$(2) \cdot \left(-\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} & -a_{22} \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} & -a_{23} \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{32} \cdot a_{21}}{a_{31}} & a_{23} - \frac{a_{33} \cdot a_{21}}{a_{31}} \end{pmatrix} \Rightarrow (2) + (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{12} - \frac{a_{22} \cdot a_{11}}{a_{21}} & a_{13} - \frac{a_{23} \cdot a_{11}}{a_{21}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{32} \cdot a_{21}}{a_{31}} & a_{23} - \frac{a_{33} \cdot a_{21}}{a_{31}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Come si può notare, queste successive due mosse di Gauss hanno consentito di ottenere una matrice in cui l'elemento $a_{21} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \dfrac{a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{11}}{a_{21}} & \dfrac{a_{13} \cdot a_{21} - a_{23} \cdot a_{11}}{a_{21}} \\ 0 & \dfrac{a_{22} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{21}}{a_{31}} & \dfrac{a_{23} \cdot a_{31} - a_{33} \cdot a_{21}}{a_{31}} \end{pmatrix}$$

Poniamo

$$A = \frac{a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{11}}{a_{21}}$$

$$B = \frac{a_{13} \cdot a_{21} - a_{23} \cdot a_{11}}{a_{21}}$$

$$C = \frac{a_{22} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{21}}{a_{31}}$$

$$D = \frac{a_{23} \cdot a_{31} - a_{33} \cdot a_{21}}{a_{31}}$$

Ottenendo la seguente matrice:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3) \cdot \left(-\frac{A}{C}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & A & B \\ 0 & -C \cdot \dfrac{A}{C} & -D \cdot \dfrac{A}{C} \end{pmatrix} \Rightarrow (3) + (2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & -\dfrac{D \cdot A + B \cdot C}{C} \end{pmatrix}$$

A questo punto, la nostra matrice ha assunto la forma triangolare cercata.

## 2.2 Forma diagonale di una matrice

Ora procediamo alla diagonalizzazione della matrice precedente, partendo dalla forma triangolare precedentemente ottenuta.

Questa volta, l'ordine di annullamento degli elementi è: $a_{12}; a_{13}; a_{23}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & -\dfrac{D \cdot A + B \cdot C}{C} \end{pmatrix} \Rightarrow (2) \cdot \left(\frac{-a_{12}}{A}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & -a_{12} & -B \cdot \dfrac{a_{12}}{A} \\ 0 & 0 & -\dfrac{D \cdot A + B \cdot C}{C} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dfrac{-A \cdot B \cdot a_{12} - A \cdot a_{13}}{A} \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & -\dfrac{D \cdot A + B \cdot C}{C} \end{pmatrix}$$

Poniamo ora:

$$\frac{-A \cdot B \cdot a_{12} - A \cdot a_{13}}{A} = E$$

$$\frac{-A \cdot B \cdot a_{12}}{A} = F$$

$$-\frac{D \cdot A + B \cdot C}{C} = G$$

Ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & E \\ 0 & A & F \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \Rightarrow (3) \cdot \frac{-E}{G} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & E \\ 0 & A & F \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix} \Rightarrow (1)+(3) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A & F \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(3) \cdot \frac{F}{E} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A & F \\ 0 & 0 & -F \end{pmatrix} \Rightarrow (2)+(3) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & -F \end{pmatrix} \Rightarrow (3) \cdot (-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

## 2.3 Esempio pratico di diagonalizzazione

Prendiamo una qualunque matrice quadrata $3 \times 3$, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow (2) \cdot 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 32 & -8 \\ 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow (3)+(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & -2 \\ 0 & 30 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(2) \cdot 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 16 & -4 \\ 0 & 30 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow (2)+(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 30 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow (2) \cdot (-2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 30 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(3)+(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow (1) \cdot 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 & 16 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow (1)+(3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(1) \cdot \frac{-15}{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} -60 & 30 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow (1)+(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow (3) \cdot \frac{15}{8} \Rightarrow \begin{pmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\{(1);(2);(3)\} \cdot \frac{-1}{30} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3 Applicazione ai sistemi

Si può usare il metodo di Gauss anche per risolvere i sistemi lineari: Consideriamo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y & = & 3 \\ x + 3y & = & -2 \end{cases}$$

Si chiama matrice completa del sistema una matrice rettangolare che ha come elementi i coefficienti delle incognite e i termini noti: nel nostro caso

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Procediamo alla risoluzione della matrice come mostrato precedentemente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Esaminando l' ultima riga possiamo già ottenere il valore di $y$ perchè corrisponde all' equazione

$$-5y = 7 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}$$

Se dividiamo l' ultima riga per il coefficiente della $y$, cioè $-5$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

In questa maniera risulta più agevole risolvere l' ultima equazione che ci dà il valore di $y$: con l'usuale metodo di sostituzione ricaviamo, a questo punto, il valore di $x$ dalla prima equazione. In tal modo:

$$2x - \frac{7}{5} = 3 \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

Possiamo semplificare ulteriormente il metodo calcolando anzichè la forma triangolare di Gauss della matrice di partenza, direttamente la forma diagonale. La nostra matrice diventerà:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -\frac{22}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Se dividiamo la prima riga per $-2$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Quindi la soluzione è:

$$x = \frac{11}{5}, \quad y = -\frac{7}{5}$$

In modo analogo proviamo a risolvere il seguente sistema $3 \times 3$:

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x - y - z & = & 2 \\ 2x + y + 3z & = & 4 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Procediamo alla diagonalizzazione della matrice, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Normalizziamo la matrice dividendo la prima riga per 2, la seconda per $-2$, la terza per 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi concludere che la soluzione è:

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = -\frac{5}{4}, \quad z = \frac{3}{4}$$