TEOREMA DI ROUCHÈ-CAPELLI

a cura di Anna Barisan, Andrea De Faveri, Andrea Della Libera, Mattia Pavan, Giacomo Zelbi
Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione dei Prof. Fabio Breda
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, a.s. 2014/15

Abstract. *In questo articolo daremo l'enunciato del teorema di Rouché-Capelli e lo utilizzeremo,mostrando come applicarlo, per rivisitare i sistemi lineari e determinarne la natura: se il sistema è impossibile, determinato o se ha infinite soluzioni e verificare il grado di libertà delle infinite soluzioni. Utilizzeremo il teorema di Rouché-Capelli.*

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

questo sistema può essere scritto in forma compatta mediante due matrici:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

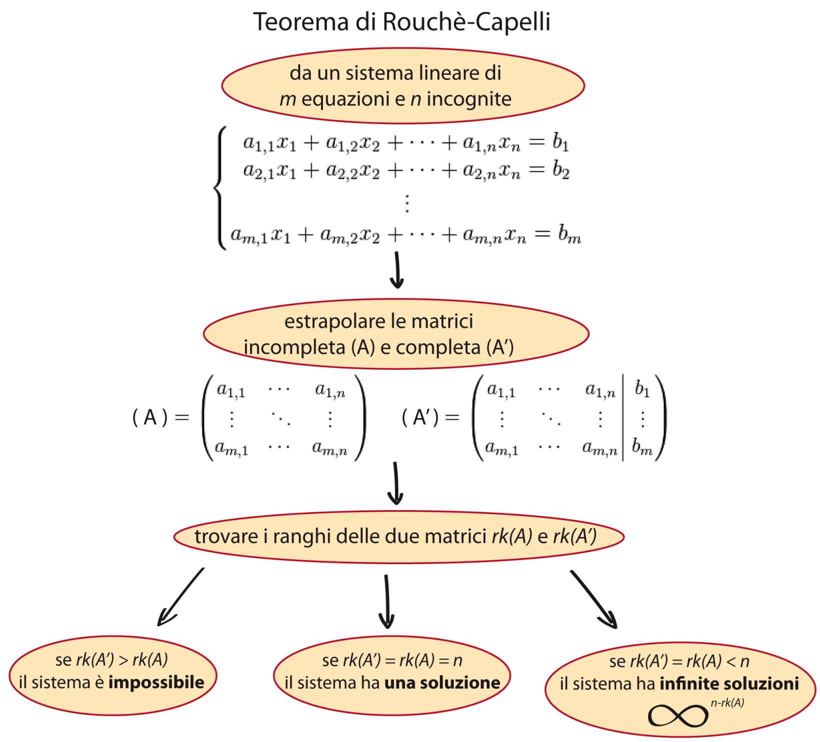
chiamata A, matrice incompleta del sistema o matrice dei coefficienti e

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

chiamata A', matrice completa del sistema.
Trovati i ranghi delle due matrici $rk(A)$ e $rk(A')$ possiamo applicare il Teorema di Rouché-Capelli.

Il **teorema di Rouché-Capelli** stabilisce che:

• se $rk(A') > rk(A)$, cioè se il rango della matrice completa è maggiore del rango della matrice incompleta (non può mai avvenire il contrario perchè la matrice completa include quella incompleta), allora il sistema lineare è impossibile.
• se $rk(A') = rk(A)$, cioè se il rango della matrice completa coincide con il rango della matrice incompleta, allora il sistema è compatibile (ammette una o infinite soluzioni).
In particolare, ricordando che n è il numero di incognite, risulta che:
• se $rk(A') = rk(A) = n$, allora abbiamo una sola soluzione;
• se $rk(A') = rk(A) < n$, allora abbiamo infinite soluzioni e il grado di libertà delle infinite soluzioni è $\infty^{n-rk(A)}$.



Applicazioni

Esempio 1: Risoluzione di un sistema lineare.

Proponiamo come esempio la risoluzione del seguente sistema di tre equazioni e quattro incognite $(n = 4)$ attraverso l'applicazione del suddetto teorema.

$$\begin{cases} x - y + z - v = 0 \\ x - 2y + 3z - 4v = 0 \\ x - 4y + 7z - 10v = 0 \end{cases}$$

Estrapoliamo ora le due matrici incompleta e completa relative al sistema:

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 7 & -10 \end{bmatrix} \qquad |A'| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 7 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora i ranghi delle due matrici: $rk(A) = 2$ e $rk(A') = 2$ Osserviamo che i due ranghi sono uguali, quindi il sistema risulta indeterminato e in particolare ha $\infty^{n-rk(A)} = \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Il sistema risolto si presenta quindi nella seguente forma:

$$\begin{cases} v = \lambda \\ z = \tau \\ x = \tau - 2\lambda \\ y = 2\tau - 3\lambda \end{cases}$$

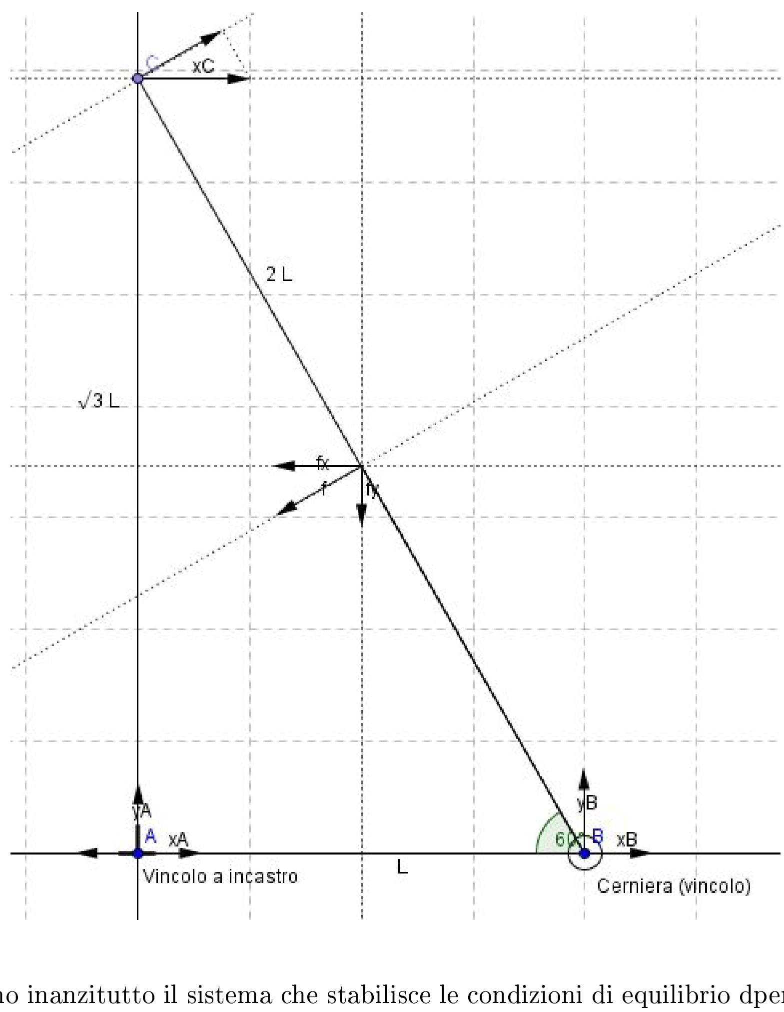
$\tau, \lambda \in R$

Esempio 2: Equilibrio di un corpo rigido.

Una particolare applicazione pratica del teorema di Rouché-Capelli è riscontrabile nell'analisi statica e cinematica dei corpi rigidi, in cui per stabilire le condizioni di equilibrio di un corpo rigido in un piano x, y, si costruisce il sistema

$$\begin{cases} \sum(F_x) = 0 \\ \sum(F_y) = 0 \\ \sum(M_z) = 0 \end{cases}$$

dove $\sum(F_x)$ e $\sum(F_y)$ indicano le forze parallele rispettivamente agli assi x e y che provocano il moto traslatorio del corpo mentre $\sum(M_z)$ indica la rotazione del corpo lungo l'asse z. Si noti che in un piano sono possibili due moti traslatori e uno di rotazione in quanto la rotazione lungo un asse non ha senso. Sono quindi possibili tre tipi di movimento che corrispondono ai tre gradi di libertà del corpo ($g.d.l.$ o L).
Continuiamo la spiegazione introducendo direttamente un esempio. Si consideri la sbarre AC ie BC in figura, dal peso trascurabile, lunghe $sqrt3*L$ e $2L$ e sulle quali agisce la forza F, scomponibile nelle componenti parallele agli assi F_x e F_y; a causa di tale forza si generano sui punti A, un vincolo a incastro (non permette alcun movimento) e B, un vincolo a cerniera (impedisce traslazione ma permette rotazione) le reazioni vincolari X_a, Y_a, X_b, Y_b.



Creiamo inanzitutto il sistema che stabilisce le condizioni di equilibrio dper i corpi AC e BC: Nel caso del corpo AC, fissato tramite incastro ad un piano, l'analisi non è necessaria in quanto l'incastro non permette nessun tipo di movimento, né rotazione nè traslazione. Ciò impica che sul punto A si determineranno reazioni vincolari in grado di contrastare qualsiasi tipo di forza esterna (limiti fisici dell'incastro permettendo). Concentriamoci quindi sull'analisi del corpo BC e creiamo il sistema di equazioni ad esso correlato, sottolineando che per il fatto che la forza F spinge il corpo BC contro il corpo AC, il punto C si comporterà similmente ad un vincolo che impedisce traslazione lungo l'asse x e la rotazione; a causa di ciò bisogna considerare nelle equazioni anche la reazione X_c, connessa a C, rappresentata comunque nella figura.

$$\begin{cases} X_b + X_c + F_x = 0 \\ y_b + F_y = 0 \\ \mathrm{L}{*}F_y{+}\cos 30{*}2\mathrm{L}{*}Y_c = 0 \end{cases}$$

E ricaviamo da esso la matrice statica S, cioè la matrice contenente i coefficienti delle reazioni vincolari, e la matrice statica allargata S', comprendente la matrice statica più un'ulteriore colonna che include le forze che agiscono sul corpo.

$$|S| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2L*cos30z \end{bmatrix} \qquad |S| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & F_x \\ 0 & 1 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 2L*cos30z & L*F \end{bmatrix}$$

Indichiamo con K_0 il rango della matrice S e con K_1 il rango della matrice S'; inoltre stabiliamo che N è il numero di reazioni vincolari mentre $L*M$ è il prodotto tra i gradi di libertà e il numero dei corpi del sistema. 5 sono i casi possibili: - se $K_0 < L*M \bigwedge K_0 < K_1$, il sistema è impossibile.
- se $K_0 < L*M \bigwedge K_0 = K_1 \bigwedge K_0 < N$, il sistema è staticamente indeterminato (può subire uno spostamento compatibile coi vincoli che presenta).
- se $K_0 < L*M \bigwedge K_0 = K_1 \bigwedge K_0 = N$, il sistema è determinato (in equilibrio).
- se $K_0 = L*M \bigwedge K_0 < N$, il sistema è indeterminato e iperstatico (non può subire alcuno spostamento in quanto i vincoli sono sovrabbondanti).
- se $K_0 = L*M \bigwedge K_0 = N$, il sistema è determinato, o isostatico (i vincoli compensano perfettamente le forze esterne e non permettono alcuno spostamento).

Nell'esempio considerato, le reazioni di BC sono 3 (N=3), il corpo è uno solo, quindi $L*M$=3; inoltre K_0=3 e k_1=3. Essendo $K_0 = L*M = N$, ci troviamo nel quinto caso, cioè il corpo BC si trova in una situazione di determinatezza ed equilibrio.
Sfidiamo ora il lettore a considerare una nuova forza F_1, che agisce con la stessa direzione di F e sempre al centro del corpo BC, ma con verso opposto. (consiglio: si presti attenzione al numero delle reazioni... una forza con verso opposto farà si che il corpo BC non poggi più su AB, quindi C quante reazioni genererà?)

Esempio 3: Parabola passante per tre punti.

Il teorema di Rouché-Capelli può essere anche usato per determinare se, considerati tre punti qualsiasi, esiste o non esiste la conica passante per essi. Consideriamo ad esempio una parabola: costruiamo un sistema di tre equazioni, composte sostituendo nell'equazione generale le coordinate dei punti; si verifica se esiste la parabola passante per essi applicando il suddetto teorema alle matrici estrapolate dal sistema. Se infatti i due ranghi risultano uguali tra di loro e uguali al numero di incognite (in questo caso specifico tre) allora il sistema ha una sola soluzione, esattamente la parabola cercata. Esamineremo ora alcuni casi diversi per dimostrare ciò. Prendiamo in considerazione una parabola con asse parallelo all'asse y di equazione $y = ax^2 + bx + c$
Elenchiamo tre casi:
1. se almeno due punti hanno la stessa ascissa la parabola non esiste;
2. se i tre punti sono allineati rispetto ad una retta la parabola non esiste;

3. se i tre punti non sono allineati e non rientrano nei due casi precedenti la parabola esiste ed è unica.

- Primo caso: due punti $A, B \in x = k$.

Consideriamo ora tre punti, due dei quali hanno la stessa ascissa: $A(1;2)$, $B(1;3)$ e $C(2;4)$. Sostituiamo le coordinate dei punti nella formula generale della parabola $y = ax^2 + bx + c$, creiamo un sistema di tre equazioni e tre incognite e le due matrici completa e incompleta da esso ricavate.

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A'| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcolati i ranghi di queste due matrici osserviamo che: $rk(A) = 2$ e $rk(A') = 3$. Poichè il rango della matrice completa è diverso del rango della matrice incompleta allora per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è impossibile: non esiste infatti la parabola che passa per tre punti di cui due lungo una retta parallela all'asse y.

- Secondo caso: i tre punti sono allineati rispetto ad una retta.

Consideriamo tre punti allineati $A(1;3)$, $B(3;7)$ e $C(4;9)$, che appartengono alla retta $y = 2x+1$, sostituiamo le coordinate dei punti nella formula generale della parabola $y = ax^2+bx+c$, creiamo un sistema di tre equazioni e tre incognite e le due matrici completa e incompleta da esso ricavate.

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A'| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 7 \\ 16 & 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora i ranghi delle due matrici: $rk(A) = 3$ e $rk(A') = 3$. Osserviamo che i due ranghi sono uguali e coincidono con il numero di incognite (3), quindi il sistema risulta determinato e in particolare ha una sola soluzione, $y = 0x^2 + 2x + 1$; questa è proprio la retta a cui appartengono i tre punti (se $a = 0$ la parabola diventa una retta) mentre la parabola non esiste.

- Terzo caso: i tre punti non sono allineati.

Consideriamo i tre punti non allineati $A(1;2)$, $B(2;5)$ e $C(-1;3)$, sostituiamo le coordinate dei punti nella formula generale della parabola $y = ax^2 + bx + c$, creiamo un sistema di tre equazioni e tre incognite e le due matrici completa e incompleta da esso ricavate.

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A'| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora i ranghi delle due matrici: $rk(A) = 3$ e $rk(A') = 3$. Osserviamo che i due ranghi sono uguali e coincidono con il numero di incognite (3), quindi il sistema risulta determinato e in particolare ha una sola soluzione, $y = \frac{7}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$ proprio la parabola passante per i tre punti.

Vogliamo quindi generalizzare il discorso: per tre punti non allineati passa sempre una sola parabola (tranne se due hanno la stessa ascissa); se invece due hanno la stessa ascissa o i tre punti sono allineati la parabola non esiste.

Prediamo tre punti generici $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$. Costruiamo quindi il sistema di tre equazioni, composte sostituendo nell'equazione generale della parabola le coordinate dei tre punti.

$$\begin{cases} y_1 = a(x_1)^2 + bx_1 + c \\ y_2 = a(x_2)^2 + bx_2 + c \\ y_3 = a(x_3)^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

Estrapoliamo le due matrici completa e incompleta:

$$|A| = \begin{bmatrix} (x_1)^2 & x_1 & 1 \\ (x_2)^2 & x_2 & 1 \\ (x_3)^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A'| = \begin{bmatrix} (x_1)^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ (x_2)^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ (x_3)^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

Se due punti hanno la stessa ascissa $x_1 = x_2$, le matrici risultano:

$$|A| = \begin{bmatrix} (x_1)^2 & x_1 & 1 \\ (x_1)^2 & x_1 & 1 \\ (x_3)^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A'| = \begin{bmatrix} (x_1)^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ (x_1)^2 & x_1 & 1 & y_2 \\ (x_3)^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

In questo caso, considerando la matrice incompleta, le prime due righe sono uguali e risulta che il rango della matrice è 2. Il rango della matrice completa invece è 3: i due ranghi sono diversi e il sistema non ha soluzioni.

Se i tre punti non sono allineati risulta che i ranghi delle due matrici sono uguali ed esiste una unica soluzione al sistema.

Se i tre punti sono allineati rispetto ad una retta, risulta che i due ranghi sono uguali ed esiste una soluzione al sistema: essa però è proprio la retta a cui appartengono i punti, la parabola non esiste.

Il discorso si può estendere anche se consideriamo la parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$: se i tre punti sono allineati la parabola non esiste; se due punti hanno la stessa ordinata non esiste; in caso contrario esiste.